KOMPARACIJA REŠENJA MODELA SA GUBICIMA I UREĐENIM BIRANJEM HETEROGENIH KANALA

Bojan Bakmaz[1], Zoran Bojković[2], Miodrag Bakmaz[1]
[1]Univerzitet u Beogradu - Saobraćajni fakultet
[2]Univerzitet u Beogradu

Sadržaj: *Fenomen heterogenih kanala sreće se u raznim vidovima saobraćaja i podrazumeva različita srednja vremena opsluge po kanalima ili grupama. Modeli se razvijaju i rešavaju više od pola veka i pripadaju sistemima sa čekanjem ili gubicima, sa slučajnim ili uređenim biranjem. Jedan broj njih je eksplicitno rešen za slučaj Poasonovog toka zahteva i više alternativnih grupa kanala, dok je za GI (General Independent) tokove to oganičeno na slučajeve od po par kanala. U ovom radu izloženo je eksplicitno rešenje za Poasonov tok, primarnu grupu i dva alternativna kanala i izvršena provera dva rešenja za modele sa GI tokovima i tri heterogena kanala sa uređenim biranjem i gubicima.*

Ključne reči: *Erlangova formula, heterogeni kanal, Palmova formula, Poasonov tok, uređeno biranje*

1. Uvod

Modeli opsluge bez čekanja (uglavnom modeli sa gubicima) primenjuju se u mnogim oblastima, poput inženjeringa telekomunikacionih mreža, dizajniranje pozivnih centara, sistema vanredne (hitne) opsluge, kompjuterskim naukama, što je vremenom ipak činilo sve uži izbor u odnosu na nebrojive varijante sistema sa čekanjem.

Osnovni model sa Poasonovim tokom (eksponencijalna raspodela vremena između nailazaka zahteva), eksponencijalnom raspodelom vremena opsluge (važi i za proizvoljnu raspodelu), potpuno dostupnom grupom kanala, rezultirao je pre jednog veka Erlangovom raspodelom zauzeća kanala i formulom gubitaka [1], koja je na nivou posmatrane grupe davala iste rezultate za gubitak i obavljeni saobraćaj, bez obzira da li je biranje kanala (servera) slučajno, uređeno (selektivno) ili po nekom drugom pravilu. Uređeno biranje podrazumeva da su kanali numerisani i dolazni zahtevi, kada nađu više od jednog slobodnog kanala, zauzimaju kanal sa manjim brojem. Zahtevi za koje ne postoji slobodan kanal su blokirani, napuštaju sistem, odnosno bivaju izgubljeni.

Po Kendelovoj oznaci radi se o modelu $M/M(G)/c/c(0)$ sa c kanala, dok je za slučaj dolaznog toka zahteva sa *GI* raspodelom (*General Independent*, *renewal*), odnosno za model $GI/M/c/c(0)$, eksplicitno rešenje izložio Palm [2]. Takacs [3] je na prostiji način dobio Palmovu formulu gubitaka i kroz nekoliko radova poboljšao i proširio teoriju opsluge *GI* tokova.

Važan i realan izazov su heterogeni kanali, koji imaju različita srednja vremena opsluge ili, recipročno, različite intenzitete opsluge, dok su, u našem razmatranju, vremena opsluge nezavisne slučajne promenljive sa negativnom eksponencijalnom raspodelom. Za razliku od tehnički realizovanih homogenih kanala, intenzitet opsluge heterogenih kanala zavisan je od obučenosti i veštine osoblja koje nude uslugu (šalterske službe, zdravstvene usluge, konvejeri), odnosno transmisionih potreba i kapaciteta kod savremenih mreža za prenos podataka. Među prvim radovima sa rešavanjem problema heterogenih kanala i uređenog biranja su rad Gumbela [4], koji razmatra *M/M/n* model sa beskonačnim redom za čekanje i heterogenim serverima, gde određuje graničnu raspodelu broja korisnika i dva rada autora Singha [5], u kojima analizira slučajeve dvokanalnog i trokanalnog sistema sa čekanjem i minimizira očekivani broj zahteva (korisnika), za razne vrednosti intenziteta opsluge. Radove ovog tipa karakteriše činjenica da se odnose na manji broj heterogenih kanala, pri čemu se analiziraju slučajevi sa raznim raspodelama dolaznog toka i vremena opsluge, kao i disciplinama čekanja. Značajnije reference ovog tipa mogu se pronaći u [6].

Ovde su od suštinskog interesa radovi koji razmatraju modele sa gubicima, odnosno bez linija za čekanje. Značajniji teorijski doprinos izložio je Cooper u [7], gde je razmatran sistem sa uređeno biranim serverima, u koji korisnici pristupaju Poasonovski. Pored slučaja sa čekanjem, posebno je tretiran i slučaj sa gubicima. U [8] je izvršena generalizacija Erlangove formule gubitaka za slučaj heterogenih kanala, dok je u [9] dokazano da je gubitak minimalan za pravilo najbrže opsluge. Komparaciju raznih redosleda servera pri biranju po redosledu izvršio je Yao [10] u nekoliko radova. Saglam i Shahbazov [11] su minimizirali verovatnoću gubitaka u *M/G/n/*0 i *GI/M/n/*0 sistemima sa heterogenim kanalima.

Isguder i Uzunoglu-Kocer su u skorije vreme objavili rad koji je zaslužio našu posebnu pažnju, a bavi se modelom *GI/M/n/n*(0) sa uređenim biranjem i heterogenim kanalima [12]. Numerički primer za Poasonove (*M*) nailaske motivisao nas je da uporedimo predstavljene rezultate sa našim, dobijenih za eksplicitno rešen model sa primarnom grupom i dva alternativna heterogena kanala. Važno je naglasiti i to da se u radu navodi veliki broj referenci iz problematike heterogenih kanala.

Naše interesovanje vezano je za fenomen prelivnog saobraćaja promenjenog intenziteta opsluge u jednoj ili u više alternativnih heterogenih grupa. Pregled referenci koje se bave ovim problemima može se naći u [13, 14]. U radu [14], pored ostalog, izvedeno je analitičko rešenje za verovatnoće stanja za slučaj većeg broja grupa, što zahteva dodatna numerička rešavanja sistema jednačina. Međutim, izvedena su eksplicitna rešenja za slučaj dve alternativne grupe i slučaj tri alternativna heterogena kanala. Rad [15] bavi se saobraćajnim problemima savremenih i budućih bežičnih mreža, pri čemu, pored raznih aktuelnih fenomena, izdvaja i fenomen heterogenosti kanala.

U ovom radu su korišćeni naši rezultati iz [14] da bi se proverili rezultati i tvrdnje iz [10-12]. U drugom delu izložena je osnovna teorija koja se odnosi na formule Palma, kao i njeno proširenje za potrebe *GI* tokova. U [12] je uočeno da prethodna rešenja ne daju dobre rezultate za *M* tok i više od dva heterogena kanala, na bazi sopstvenih poboljšanja. Treći deo posvećen je izvođenju eksplicitnog rešenja za sistem sastavljen od primarne grupe sa c kanala i dva alternativna heterogena kanala, koji se može iskoristiti za analizu sistema od tri kanala. Napomenimo da je u [14] dato eksplicitno rešenje za tri alternativna kanala, što omogućuje analizu sistema od četiri heterogena kanala sa uređenim biranjem. Četvrti deo daje numeričke rezultate kojim se zaokružuje problem vezan za tri kanala, a zatim sledi zaključak.

2. Gubitak u modelu *GI/M/n*/0 sa heterogenim kanalima i uređenim biranjem

Za *GI*/*M*/*n*/0 sistem sa gubicima i n homogenih kanala važi Palmova formula gubitaka (nazivana i Generalizovanom Erlangovom formulom)

$$\frac{1}{p_n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - f(i\mu)}{f(i\mu)}, \tag{1}$$

gde su: $f(\cdot)$ Laplasova (Laplace-Stieltjes, LS) transformacija za funkciju raspodele dolaznog toka $F(t)$, sa parametrom λ, a μ intenzitet opsluge.

Za slučaj uređenog biranja, gde $f_k(s)$ označava LS transformaciju raspodele vremena između prelivenih zahteva posle prvih k kanala važi Palmova rekurentna formula

$$f_k(s) = \frac{f_{k-1}(s+\mu)}{1 - f_{k-1}(s) + f_{k-1}(s+\mu)}, \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

gde je $f_0(s) = f(s)$ LS transformacija za funkciju raspodele dolaznog toka $F(t)$.

Neki autori [10, 11] prihvataju da prethodna formula važi i u slučaju heterogenih kanala, odnosno da važi

$$f_k(s) = \frac{f_{k-1}(s+\mu_k)}{1 - f_{k-1}(s) + f_{k-1}(s+\mu_k)}, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Za gubitke u sistemu od n kanala važilo bi

$$p_n^* = f(\mu_1) f_1(\mu_2) \cdots f_{n-1}(\mu_n), \tag{4}$$

dok su gubici u prva dva kanala

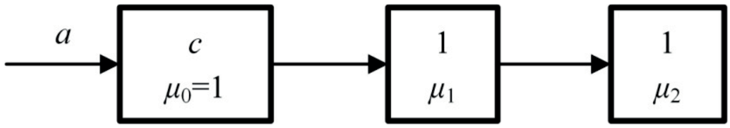
$$p_1^* = f(\mu_1), \quad p_2^* = \frac{f(\mu_1) f(\mu_1+\mu_2)}{1 - f(\mu_1) + f(\mu_1+\mu_2)}. \tag{5}$$

Za slučaj homogenih kanala ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$) gubici po formuli (5) odgovaraju onim dobijenim po Palmovoj formuli (1), za $n = 1, 2$.

U radu [12] razvijen je složeniji postupak za određivanje gubitaka za prethodni sistem. Za Poasonov (*M*) dolazni tok gubici su kao (5) dok se izrazi za p_3^* i novo P_3, koji su višestruko duži od (5), znatno razlikuju, pa je izvršena numerička analiza.

3. Model sa primarnom grupom i dva alternativna heterogena kanala

Koristeći vrlo složeno eksplicitno rešenje za model sa dve alternativne grupe izloženo u [14], može se dobiti prostije i preglednije rešenje za model sa dva alternativna heterogena kanala (Slika 1).



Slika 1. *Model sa dva alternativna heterogena kanala*

Trodimenzionalne verovatnoće stanja su oblika

$$p(m,n_1,n_2) = (-1)^{n_1+n_2} \sum_{k_1=n_1}^{1} \binom{k_1}{n_1} \sum_{k_2=n_2}^{1} \binom{k_2}{n_2} R_{\mu_1 k_1+\mu_2 k_2}(m) C(k_1,k_2), \qquad (6)$$

gde su (m, n_1, n_2) stanja, odnosno zauzeća kanala u primarnoj grupi i alternativnim kanalima sa kapacitetima (c, 1, 1), $\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2 = v$, pa se preko v omogućuje korišćenje relacije (7).

Za parametre $R_{\mu n}(m)$ važe sledeće formule

$$R_0(m) = \frac{a^m}{m!}, \quad R_v(m) = \sum_{i=0}^{m} \binom{v+i-1}{i} \frac{a^{m-i}}{(m-i)!}, \quad v > 0, \qquad (7)$$

pri čemu će se nadalje javljati samo stanje $m = c$, odnosno koristiti oznaka $R_{\mu n}(c) = R_{\mu n}$. Za gubitak u primarnoj grupi važi Erlangova formula gubitaka, $b_c = E_c(a) = R_0/R_1$.

Gubitak zahteva u sistemu je sada $b_{c12} = p(c, 1, 1) = R_{\mu 1+\mu 2}\ C_1(1,1)$. Gubitak u sekundarnom kanalu je $b_1 = p(c, 1)/b_c = -R_{\mu 1} C_1(1) R_1/R_0$, dok u tercijalnom imamo $b_2 = p(c, 1, 1)/p(c, 1) = -\ R_{\mu 1+\mu 2} C_1(1,1)/(R_{\mu 1} C_1(1))$. Indeks 1 uz C je potreban da bi se naglasilo da se radi o jednokanalnoj grupi.

Na osnovu (7) iz [14], može se odrediti koeficijent $C_1(1)$ i gubitak b_1

$$C_1(1) = \frac{-aR_0/R_1}{aR_{\mu_1} + \mu R_{\mu_1+1}}, \qquad b_1 = \frac{aR_{\mu_1}}{aR_{\mu_1} + \mu_1 R_{\mu_1+1}}. \qquad (8)$$

Za jednokanalnu primarnu grupu, odnosno kada je $c = 1$, imamo $R_0 = a$, $R_1 = a + 1$, $R_{\mu 1} = a + \mu_1$, $R_{\mu 1+1} = a + \mu_1 + 1$. U slučaju tri homogena kanala sa uređenim biranjem poznata je relacija $b_c > b_1 > b_2$, dok se kod heterogenih kanala može zadovoljiti uslov

$$b_c = \frac{a}{1+a} \le b_1 = \frac{a(a+\mu_1)}{a(a+\mu_1)+\mu_1(a+\mu_1+1)}, \tag{9}$$

koji će važiti za $a \geq \mu_1^2/(1 - \mu_1)$ i $\mu_1 < 1$.

Za trokanalni model imali bi $C_1(0, 0) = C_1(0) = 1/R_1$ i $C_1(1, 0) = C_1(1)$, dok se za koeficijente $C_1(0, 1)$ i $C_1(1, 1)$ koriste jednačine dobijene na bazi (9) iz [14]

$$\mu_2 R_{\mu_2+1} C_1(0,1)/a = R_{\mu_1} C_1(1,0) + R_{\mu_1+\mu_2} C_1(1,1) \tag{10}$$

i

$$\begin{aligned} -(\mu_1+\mu_2) R_{\mu_1+\mu_2+1} C_1(1,1)/a = \\ = R_{\mu_2} C_1(0,1) + R_{\mu_1+\mu_2} C_1(1,1) + R_{\mu_1} C_1(1,0) + R_{\mu_1+\mu_2} C_1(1,1). \end{aligned} \tag{11}$$

Radi preglednosti, mogu se prikazati u formi

$$C_1(0,1) = dC_1(1,1) + e, \qquad C_1(1,1) = fC_1(0,1) + g \tag{12}$$

i odrediti nepoznati koeficijenti

$$C_1(1,1) = (fe+g)/(1-fd), \qquad C_1(0,1) = d(fe+g)/(1-fd) + e. \tag{13}$$

Ovde bi bilo interesantno eksplicitno pronaći kada je zadovoljeno da je $b_c \leq b_2$ i $b_1 \leq b_2$, ali se čini da je to vrlo komplikovano i zametno, odnosno, mnogo je pogodnije pronalaziti numerička rešenja za konkretne vrednosti a, μ_1, μ_2, koristeći prethodno prezentovanu proceduru za dobijanje koeficijenata $C_1(n_1, n_2)$.

4. Poređenje tri rešenja sistema *M*/*M*/3/0 sa uređeno biranim heterogenim kanalima

Sistem opsluge *GI/M/n/*0, sa uređeno biranim heterogenim kanalima bez linije čekanja analiziran je u [12]. Razvijen je sopstveni postupak za određivanje parametara sistema, posebno gubitaka. Autori su uočili da se njihovi rezultati podudaraju sa rezultatima drugih autora [10, 11], zasnovanim na modifikovanim Palmovim formulama, samo do slučaja sistema sa dva heterogena kanala. U dodatku rada [12] izvršena je numerička provera za *M/M*/2/0 i *M/M*/3/0 modele opsluge sa heterogenim kanalima. Vrednosti gubitaka za *M/M*/2/0 model su se poklopili za oba metoda, pri čemu je i naš metod dao iste rezultate, vodeći računa o razlici u oznakama i vrednostima parametara. Napomenimo da autori nisu koristili neki metod koji bi dao eksplicitne ili numerički rešavane rezultate za slučaj Poasonovog (*M*) toka, što se odrazilo kao nedostatak i nedorečenost u slučaju tretiranja trokanalnog sistema.

U *Tabeli 1* prilagođene su oznake i vrednosti našem rešenju modela *M*/*M*/3/0 i date su vrednosti za gubitke kod tri aktuelna modela (P_3, p_3^*, b_{c12}), uz razmatranje slučajeva *fastest-service rule* (pravilo najbržeg servisa) i *arbitrary permutation* (proizvoljna promena redosleda), kada su u pitanju drugi i treći kanal.

*Tabela 1. Vrednosti gubitaka za M/M/*3/0 *sistem uređenih heterogenih kanala*

Parametri	*The fastest-service rule*	*Arbitrary permutation*
a	1.5 Erl.	1.5 Erl.
μ_0	1	1
μ_1	3/4	1/6
μ_2	1/6	3/4
P_3	0.26533	0.27705
p_3^*	0.29988	0.19856
b_{c12}	0.27189	0.28593

Rezultati za verovatnoću zauzeća tri uređeno birana heterogena kanala, P_3, su dobijeni po teoriji razvijenoj u [12], odnosno po prikazanoj formuli, koja je neuobičajeno dugačka. Svoje provere i zapažanja izvršili su komparacijom sa rezultatima za p_3^*, čija je formula takođe izložena, a dobijena je na bazi modifikacije formule Palma, kojom se služi veći broj autora [10, 11]. Naša formula sa oznakom b_{c12} proistekla je iz višedimenzionog sistema statističke ravnoteže, odnosno iz razmatranja opsluge Poasonovog (*M*) toka i u tom smislu je eksplicitna. Autori iz [12] su uočili da po njihovom modelu gubitak u sistemu P_3 ima manju vrednost ako se pre koristi kanal sa većim intenzitetom opsluge, što je opštepoznato, dok za p_3^*, to ne važi. Rezultati dobijeni po našem modelu zadovoljavaju to pravilo. Prihvatljivo je da se rešenja dobijena za modele sa *GI* dolaznim tokom poklapaju sa prostijim rešavanjima za *M* tok, što recimo važi za osnovnu Palmovu formulu gubitaka, koja tada prelazi u Erlangovu formulu gubitaka.

5. Zaključak

U ovom radu akcenat je na teorijskom rešavanju modela sa heterogenim uređeno biranim kanalima, bez mogućnosti čekanja. Heterogeni kanali, odnosno kanali sa različitim intenzitetima opsluge, po prirodi bi odgovarali servisima kod kojih opslugu vrši osoblje sa različitim brzinama obavljanja posla, a kao teorijski fenomen rešavaju se već više od pola veka. Dodatno usložnjenje je realno postojanje redova čekanja i disciplina opsluživanja. Sistemi sa gubicima su vezani za tehničke sisteme, značajno za telekomunikacione mreže, gde se heterogenost, osim kod saobraćaja, prepoznavala i pri korišćenju alternativnih grupa. Pogodnost modela sa gubicima je što su lakši za rešavanje, a dobijeni kvalitativni, pa i kvantitativni rezultati mogu se generalizovati.

Naše istraživačko iskustvo se formiralo na fenomenu heterogenosti alternativnih grupa kod telekomunikacionih mreža, što je u početku bio sporadični fenomen, da bi danas heterogenost kanala bila prepoznat problem, uz sve teorijske izazove koje savremene mreže donose. Dometi su: eksplicitno i kompleksno rešenje za slučaj dve alternativne heterogene grupe i eksplicitno rešenje modela sa tri alternativna heterogena kanala, sa uobičajenom višekanalnom primarnom grupom, što se može naći u citiranoj referenci [14]. Na toj teoriji su i zasnovana naša rešenja vezana za probleme izložene u ovom radu.

Pored namere da se naša rešenja inkorporiraju u opštu problematiku saobraćajnog modelovanja aktuelnih mobilnih mreža, ideja je da se nastavi rad na heterogenim višekanalnim modelima, jer tu očigledno postoji nedovoljno istražen prostor.

Literatura

[1] A. K. Erlang, "Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges", *Elektroteknikeren*, vol.13, pp. 138-155, 1917.

[2] C. Palm, "Intensitatschwwankugen fersperchverkehr", *Ericsson and Technics*, vol. 44, pp.1-189, 1943.

[3] L. Takacs, "On the generalization of Erlang's formula", *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, vol. 7, pp. 419-433, September 1956.

[4] M. Gumbel, "Waiting lines with heterogeneous servers", *Operations Research,* vol. 8, no. 4, pp. 504-511, July-August 1960.

[5] V. P. Singh, "Markovian queues with three heterogeneous servers", *AIIE Transactions*, vol. 3, no. 1, pp. 45-48, January 1971.

[6] S. Ramasamy, O. A. Daman, S. Sani, "An M/G/2 queue where customers are served subject to a minimum violation of FCFS queue discipline", *European Journal of Operational Research*, vol. 240, no. 1, pp. 140-146, January 2015.

[7] R. B. Cooper, "Queues with ordered servers that work at different rates", *Opsearch*, vol. 13, no. 2, pp. 69-78, 1976.

[8] D. Fakinos, "The M/G/k blocking system with heterogeneous servers", *The Journal of the Operational Research Society,* vol. 31, no. 10, pp. 919–927, October 1980.

[9] G. B. Nath, E. G. Enns, "Optimal service rates in the multiserver loss system with heterogeneous servers", *Journal of Applied Probability,* vol. 18, no. 3, pp. 776-781, September 1981.

[10] D. D. Yao, "The arrangement of servers in an ordered-entry system", *Operations Research*, vol. 35, no. 5, pp. 759-763, October 1987.

[11] V. Saglam, A. Shahbazov, "Minimizing loss probability in queuing systems with heterogeneous servers", *Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science*, vol. 31, no. 2, pp. 199-206, Summer 2007.

[12] H. O. Isguder, U. Uzunoglu-Kocer, "Analysis of GI/M/n/n queueing system with ordered entry and no waiting line", *Applied Mathematical Modelling*, vol. 38, no. 3, pp. 1024-1032, February 2014.

[13] V. B. Iversen, "Systems with selective overflow and change of bandwidth", *Proc. 1st IEEE International Conference on Communications in China (ICCC 2012)*, Beijing, China, pp. 694-697, August 2012.

[14] B. Bakmaz, Z. Bojkovic, M. Bakmaz, "Queuing loss models with more alternative heterogeneous groups", *International Journal of Communication Systems*, vol. 31, no. 6, e3522, pp. 1-14, April 2018.

[15] M. Głąbowski, D. Kmiecik, M. Stasiak, "Modelling of multiservice networks with separated resources and overflow of adaptive traffic", *Wireless Communications and Mobile Computing*, vol. 2018, Article ID 7870164, pp. 1-17, August 2018.

Abstract: *Phenomenon of heterogeneous channels can be met in various traffic types and implies different serving intensities in channels or groups. Models are developing and solving more than half of a century, and they belong to the group of queuing or loss systems with random or ordered entry. Some of them are explicitly solved in the case of Poisson stream and more alternative channels groups, while in the case of GI streams only couple of channels are considered. In this paper, explicit solutions for Poisson stream, as well as for primary group with two alternative channels are proposed. Moreover, verification for two solutions of loss models with GI streams and tree ordered entry heterogeneous channels is carried out.*

Keywords: *Erlang's formula, heterogeneous channel, ordered entry, Palm's formula Poisson stream*

COMPARISON OF THE SOME LOSS MODELS SOLUTIONS WITH ORDERED ENTRY HETEROGENEOUS CHANNELS

Bojan Bakmaz, Zoran Bojković, Miodrag Bakmaz