TOKOVI KOKSOVE RASPODELE U MODELIMA TELEKOMUNIKACIONOG SAOBRAĆAJA

Miodrag Bakmaz, Bojan Bakmaz
Saobraćajni fakultet u Beogradu

Sadržaj: *U ovom radu izvršena je analiza svojstava tokova Koksove raspodele, koji predstavljaju specifičnu grupu tokova faznog tipa. Iako složenog oblika, sadrže kombinaciju ponderisanih eksponencijalnih komponenti, pa je moguće lako nalaženje Laplasove transformacije i složenije analitičko proračunavanje u modelima opsluge. Veliki broj parametara omogućuje kvalitetnu aproksimaciju raspodela generalnog tipa.*

Izložena su svojstva srodnih raspodela, Erlangove i hipereksponencijalne, kao i parametri podešavajućih raspodela. Naglasak je stavljen na podskup Erlang-Koksovih raspodela koje su pogodne za podešavanje preko tri momenta. Posebno se analiziraju saobraćajne situacije u savremenim telekomunikacionim mrežama, gde su korišćeni modeli sa Koksovom raspodelom dolaznog toka ili vremena opsluge.

Ključne reči: *Koksova raspodela, tokovi faznog tipa, podešavajuće raspodele, Erlang.*

1. Opšte karakteristike raspodela vremena trajanja

Vremenski intervali koje razmatramo, odnosno vremena trajanja (vreme između zahteva, vreme opsluge, vreme čekanja, vreme zauzimanja, periodi zauzeća i blokiranja (trajanje zagušenja)), su nenegativne slučajne veličine koje imaju svoje vremenske raspodele. Mogu se opisati slučajnom promenljivom T, koja ima verovatnoću da je manja od vremena t, odnosno (kumulativnu) funkciju raspodele $F(t) = p(T \leq t)$. Nekada je od interesa komplementarna funkcija raspodele, funkcija preživljavanja, $F^c(t) = 1 - F(t)$, a najčešće se koristi funkcija gustine raspodele $f(t)$, koja je u relaciji sa diferencijabilnom funkcijom raspodele, $dF(t) = f(t)dt = p(t < T \leq t + dt)$.

Za raspodele vremena trajanja, odnosno njihov i-ti moment, važi Palmov identitet

$$m_i = M\{T^i\} = \int_0^\infty t^i f(t)dt = \int_0^\infty i t^{i-1}\{1 - F(t)\}dt \quad i = 1, 2,... \tag{1}$$

Prvi moment predstavlja srednju vrednost (očekivanje) $m = m_1 = M(T)$, a i-ti centralni moment se definiše kao

$$M\left\{(T-m)^i\right\} = \int_0^\infty (T-m)^i f(t)dt\,, \tag{2}$$

pa je raspodela jedinstveno definisana preko svih njenih momenata. Varijansa (disperzija) predstavlja drugi centralni moment, odnosno kvadratnu vrednost standardne devijacije, $v = \sigma^2 = m_2 - m^2 = M\{(T - m)^2\}$, a normalizovanu meru neregularnosti izražava koeficijent varijacije $c_v = \sigma/m$. Za istu svrhu služi faktor oblika, $f_o = 1 + (\sigma/m)^2$. Za ocenu raspodele na bazi opservacija najčešće se koriste ovi parametri, odnosno prva dva momenta, pošto je za procenu viših momenata potreban mnogo veći broj opservacija.

Vremenske raspodele mogu se prevesti u kompleksni domen Laplasovom (Laplace – Stieltjes, LST) transformacijom oblika

$$\Phi(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} dF(t) = \int_0^\infty f(t) e^{-\theta t} dt, \qquad \mathrm{Re}\,\theta > 0, \tag{3}$$

koja je od značaja pri rešavanju raznih modela opsluge. Na bazi Laplasove transformacije mogu se dobiti viši momenti, jer postoji relacija

$$\left.\frac{d^i \Phi(\theta)}{d\theta^i}\right|_{\theta=0} = (-1)^i M_i(T). \tag{4}$$

Vremena trajanja mogu se spajati redno, paralelno ili kombinovano. Povezivanje u seriju k nezavisnih vremenskih intervala odgovara sabiranju k nezavisnih slučajnih promenljivih, odnosno njihovoj konvoluciji. Suma nezavisnih slučajnih promenljivih ima srednju vrednost i varijansu jednake sumi srednjih vrednosti, odnosno sumi varijansi pojedinih slučajnih promenljivih, a gustina raspodele sume dobija se konvolucijom gustina pojedinih raspodela

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) * \cdots * f_k(t), \tag{5}$$

gde je * konvolucioni operator. Za Laplasovu transformaciju važi

$$\Phi(\theta) = \Phi_1(\theta)\Phi_2(\theta)\cdots\Phi_k(\theta). \tag{6}$$

Za istovetne gustine raspodela važiće sledeći konvolucioni integral

$$f(t) = f^k(t) = \int_0^t f^{k-1}(t-\tau) f^1(\tau) d\tau, \tag{7}$$

gde je $f^1(t)$ gustina raspodele osnovne slučajne promenljive.

Za l nezavisnih slučajnih promenljivih u paraleli, pri čemu svaka ima svoj težinski faktor p_i, srednju vrednost m_{1i} i varijansu v_i, rezultujuća slučajna promenljiva ima parametre

$$m = m_1 = \sum_{i=1}^{l} p_i m_{1i}\,, \qquad v = \sum_{i=1}^{l} p_i (v + m_{1i}^2) - m^2\,, \qquad \sum_{i=1}^{l} p_i = 1. \tag{8}$$

Rezultujuća funkcija raspodele je

$$F(t) = \sum_{i=1}^{l} p_i F_i(t), \tag{9}$$

što važi i za gustinu raspodele.

2. Tok eksponencijalne raspodele

Negativna eksponencijalna raspodela je najznačajnija vremenska raspodela u Teoriji telekomunikacionog saobraćaja. Karakteriše tok zahteva sa parametrom λ (ili pak vreme opsluge sa parametrom μ), pa funkcija i gustina raspodele imaju oblike

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0; \qquad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \tag{10}$$

Srednja vrednost raspodele je $m = m_1 = 1/\lambda$, drugi moment $m_2 = 2/\lambda^2$, varijansa $v = 1/\lambda^2$, koeficijent varijacije $c_v = 1$, a faktor oblika $f_o = 2$. Vrlo je pogodna za predstavljanje vremenskih intervala raznih fizičkih pojava, zbog osobine odsustva memorije.

3. Tokovi Erlangove raspodele

Toku generalizovane Erlangove raspodele (hipoeksponencijalna raspodela, „strma“ (steep) raspodela) k-tog reda odgovara serija (suma) stohastički nezavisnih eksponencijalnih raspodela, odnosno konvolucija k eksponencijalnih raspodela. Za slučaj eksponencijalnih raspodela istog parametra λ dobili bi Erlangov tok k-tog reda sa gustinom raspodele

$$f(t) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda t}, \qquad \lambda > 0, \quad t > 0, \quad k = 1,2,... \tag{11}$$

Često se za ovaj tok kaže da se dobija „prosejavanjem“ eksponencijalnog toka, tako što se posmatra svaki k-ti zahtev. Funkcija raspodele predstavlja verovatnoću da je slučajna veličina manja ili jednaka trajanju k uzastopnih vremena između zahteva Puasonove raspodele, odnosno verovatnoću da će naići k ili više zahteva

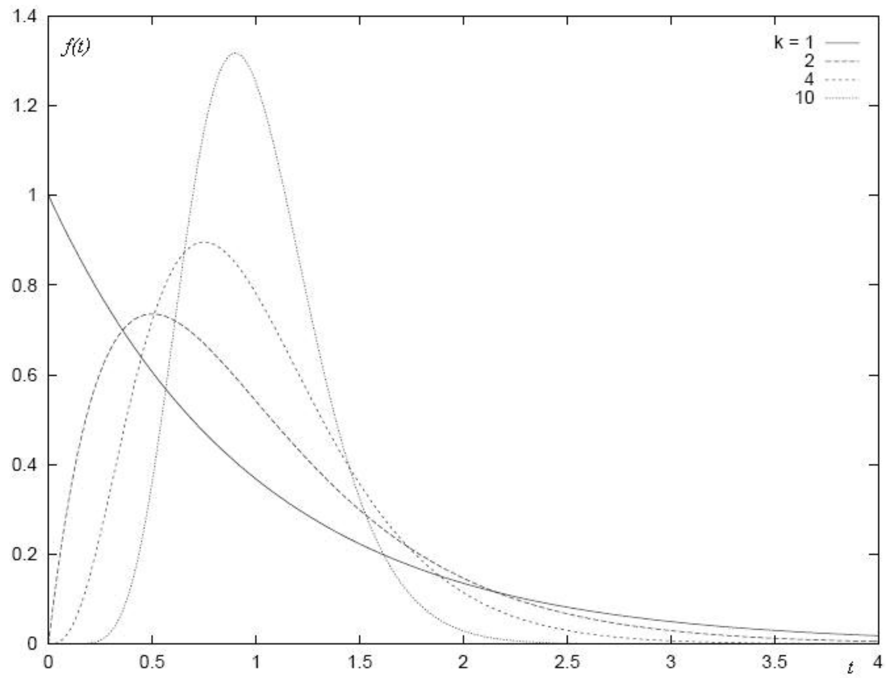
$$F(t) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \tag{12}$$

Srednja vrednost ove raspodele je $m = k/\lambda$, varijansa $v = k/\lambda^2$, a faktor oblika $f_o = 1+1/k$.

Ova raspodela ima dva parametra, λ i k. Pošto je parametar λ iz eksponencijalne raspodele, možemo uvesti sopstveni parametar λ_k, zamenom λ sa $k\lambda_k$ (ili t sa kt). Tada će gustina raspodele imati oblik

$$f(t) = \frac{(\lambda_k kt)^{k-1}}{(k-1)!} k\lambda_k e^{-k\lambda_k t}, \tag{13}$$

srednju vrednost $m = 1/\lambda_k$, varijansu $v = 1/(k\lambda_k^2)$, koeficijent varijacije $c_v = 1/\sqrt{k}$ i faktor oblika $f_o = 1+1/k$, koji je nezavisan od vremenske skale, manji je od 2, i za veliko k teži ka 1, odnosno osobinama determinisanog toka, čija se gustina raspodele može predstaviti Dirakovim impulsom, $f(t) = \delta(t-1/\lambda)$, koji ima beskonačnu vrednost za $t = 1/\lambda$ i površinu 1.



Slika 1. *Gustine raspodela Erlangovih tokova srednje vrednosti* 1 (k = λ) *za razne vrednosti* k

Za slučajeve eksponencijalnog (M), determinisanog (D) i Erlangovog toka k -tog reda (E_k), Laplasove transformacije su oblika

$$\Phi_M(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}, \qquad \Phi_D(\theta) = e^{-\theta/\lambda}, \qquad \Phi_{E_k}(\theta) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\theta}\right)^k \tag{14}$$

4. Tokovi hipereksponencijalne raspodele

Za razliku od „strmih“ (steep) raspodela, koje karakteriše faktor oblika manji nego kod eksponencijalne raspodele, odnosno čija funkcija raspodele brže raste, postoje i „pljosnate“ (flat) raspodele čiji je faktor oblika veći od 2, odnosno disperzija veća od srednje vrednosti. Generalna funkcija raspodele u ovom slučaju je težinska suma eksponencijalnih raspodela

$$F(t) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t})\,dW(\lambda), \quad \lambda \ge 0, \qquad t \ge 0,$$

(15)

sa težinskom funkcijom $W(\lambda)$ koja može biti kontinualna ili pak diskretna.

Za diskretnu težinsku funkciju može se formirati hipereksponencijalna funkcija oblika

$$F(t) = 1 - \sum_{i=1}^{l} p_i e^{-\lambda_i t}, \qquad t \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{l} p_i = 1, \tag{16}$$

koja predstavlja kombinaciju l eksponencijalnih raspodela u paraleli i gde je p_i verovatnoća da vremenski interval pripada i-toj raspodeli.

Za praktične potrebe najveći značaj ima bieksponencijalna raspodela sa gustinom

$$f(t) = p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \qquad p_1 + p_2 = 1, \tag{17}$$

čija je varijasa veća od kvadrata srednje vrednosti, odnosno faktor oblika veći od dva, a koja prelazi u eksponencijalnu raspodelu pri istim parametrima, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Njena Laplasova transformacija je oblika

$$\Phi(\theta) = \frac{p_1\lambda_1}{\lambda_1 + \theta} + \frac{p_2\lambda_2}{\lambda_2 + \theta}. \tag{18}$$

Interesantna je prethodna raspodela sa dva parametra, p i λ. Sada su $p_1 = p$, $p_2 = 1\text{-}p$, $\lambda_1 = 2p\lambda$, $\lambda_2 = 2(1\text{-}p)\,\lambda$, a srednja vrednost, varijansa i faktor oblika

$$m = \frac{1}{\lambda},\; v = \frac{1}{\lambda^2}\left[1 + \frac{(1-2p)^2}{2p(1-p)}\right] = \frac{1-2p(1-p)}{2p\lambda^2(1-p)}, \;\; f_o = \frac{1}{2p(1-p)}, \tag{19}$$

dok je Laplasova transformacija

$$\Phi(\theta) = \frac{2p^2\lambda}{2p\lambda + \theta} + \frac{2(1-p)^2\lambda}{2(1-p)\lambda + \theta}. \tag{20}$$

Ako bi umesto verovatnoća kod bieksponencijalne raspodele posmatrali koeficijente $p_1 = \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1)$ i $p_2 = \lambda_1/(\lambda_1 - \lambda_2)$, od kojih je jedan negativan a drugi pozitivan i veći od jedinice, gustina raspodele, srednja vrednost i varijansa bi bile

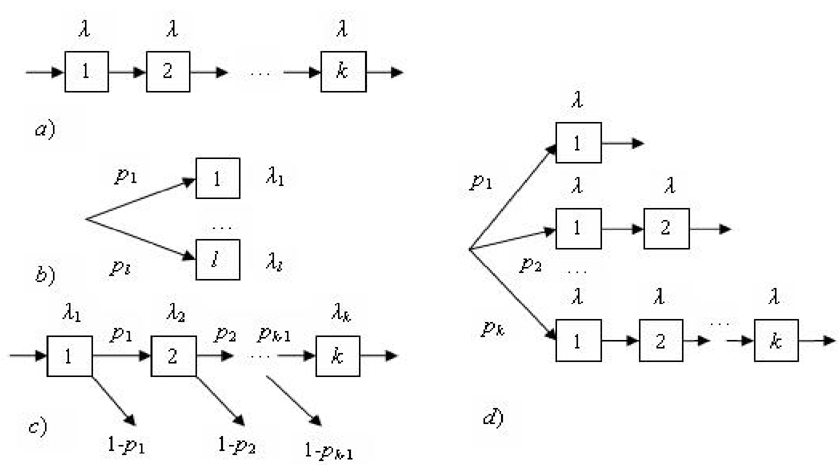
$$f(t) = \lambda_1\lambda_2 \frac{e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad m = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}, \qquad v = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}, \tag{21}$$

a Laplasova transformacija bi imala oblik

$$\Phi(\theta) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \theta} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \theta}\right). \tag{22}$$

5. Raspodele faznog tipa

Prethodne raspodele su specijalni slučajevi raspodela faznog tipa, *PH*. Ove raspodele karakterišu se Markovskim lancem sa stanjima (fazama) 1,..., k i tranzicionom matricom verovatnoća P, koja je tranzijentna, što podrazumeva da P^n teži nuli kada n teži beskonačnosti. Drugim rečima, uvek postoji mogućnost da se napusti Markov lanac. Vreme boravka u stanju i eksponencijalne je raspodele sa srednjom vrednošću $1/\lambda_i$, a Markov lanac je ušao u stanje i sa verovatnoćom p_i. Slučajna promenljiva predstavlja ukupno vreme koje je proteklo od ulaska u Markovljev lanac do izlaska iz njega, a njena je raspodela faznog tipa.



Slika 3. *Fazni dijagrami za* a) *Erlangovu*-k, b) *hipereksponencijalnu*, c) *Koksovu*-k i d) *hipererlangovu raspodelu*

Poseban značaj aproksimiranje funkcija generalne raspodele, pored Erlangove i hipereksponencijalne, imaju Koksova i hipererlangova (mešavina Erlangovih) raspodela. Slučajna promenljiva ima Koksovu raspodelu reda k ako prolazi kroz najviše k eksponencijalnih faza. Srednje trajanje faze i je $1/\lambda_i$ i iz nje se može okončati ukupno trajanje sa verovatnoćom $1\text{-}p_i$, ili ući u sledeću fazu sa verovatnoćom p_i. Jasno je da je $p_k = 0$. Za Koks-2 raspodelu kvadrat koeficijenta varijacije je veći od 0,5. Slučajna promenljiva ima hipererlangovu raspodelu reda k, ako je sa verovatnoćom p_i jednaka sumi i eksponencijalnih raspodela iste srednje vrednosti (odnosno erlangovoj raspodeli i-tog reda), $i = 1,..., k$. Fazne realizacije ovih raspodela prikazane su na slici 2.

6. Podešavajuće raspodele

U praksi se često dešava da je za slučajnu promenljivu dostupna srednja vrednost m i varijansa $v = (c_v\, m)^2$. Za dobijanje aproksimacije koriste se *PH* raspodele. Često korišćena bierlangova raspodela $E_{k\text{-}1,k}$, ima gustinu

$$f(t) = p\lambda \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda t} + (1-p)\lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, \qquad t > 0, \tag{23}$$

gde je $0 \le p \le 1$, a kvadrat koeficijenta varijacije kreće se u granicama $1/k \le c_v^2 \le 1/(1\text{-}k)$. Znači, ukoliko je koeficijent varijacije manji od jedan moguće je nepoznatu raspodelu aproksimirati bierlangovskom, pri čemu se koriste relacije

$$p = \frac{kc_v^2 - \sqrt{k(1+c_v^2) - k^2 c_v^2}}{1+c_v^2}, \qquad \lambda = \frac{k-p}{m}. \tag{24}$$

U slučaju $c_v > 1$ podešavanje se vrši bieksponencijalnom raspodelom, pri čemu ona nije jedinstveno određena sa prva dva momenta. Zato se često koristi normalizacija, odnosno balansirane srednje vrednosti, $p/\lambda_1 = (1\text{-}p)/\lambda_2$ i parametri

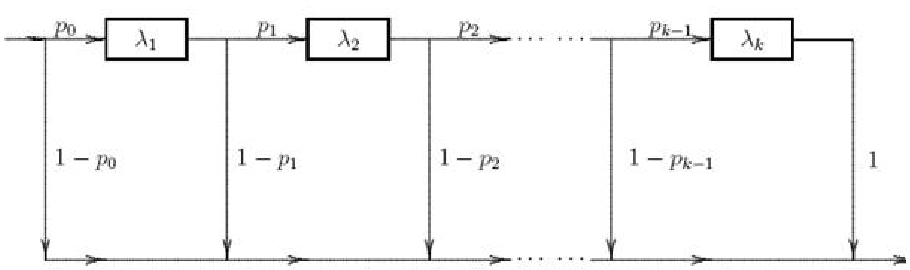
$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{c_v^2 - 1}{c_v^2 + 1}}\right), \quad \lambda_1 = \frac{2p}{m}, \quad \lambda_2 = \frac{2(1-p)}{m}. \tag{25}$$

U slučaju $c_v^2 \ge 0{,}5$ takođe se može koristiti Koks-2 raspodela i prva dva momenta. U ovom slučaju preporučuju se relacije $\lambda_1 = 2m$, $p = 0{,}5/c_v^2$, $\lambda_2 = \lambda_1 p$.

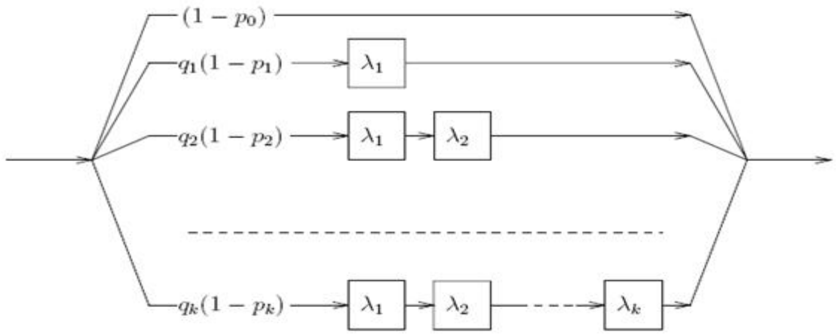
Moguće je mnogo sofisticionarnije koristiti *PH* raspodele, recimo podešavanjem preko tri ili više momenata.

7. Osobine Koksove raspodele

Već definisana Koksova raspodela (ili Erlangova raspodela sa granjanjem) može se opštije predstaviti faznim dijagramom na slici 4, a njen ekvivalent je hiperhipo raspodela (hipergeneralna Erlangova raspodela), sa faznim dijagramom kao na slici 5.



Slika 4. *Fazni dijagram Koksove raspodele*



Slika 5. *Ekvivalentni fazni dijagram Koksove raspodele*

Formula za srednju vrednost ima oblik

$$m = \sum_{i=1}^{k} q_i (1-p_i) \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\lambda_j}, \qquad q_i = \prod_{j=0}^{i-1} p_j, \tag{26}$$

dok je Laplasova transformacija gustine raspodele oblika

$$\Phi(\theta) = \sum_{i=0}^{k} (1-p_i) \prod_{j=0}^{i-1} p_j \frac{\lambda_{j+1}}{\theta + \lambda_{j+1}}, \qquad \prod_{j=0}^{-1} (\cdot) = 1. \tag{27}$$

Po pravilu se koristi slučaj $p_o = 1$, a ako bi imali $\lambda_i = \lambda$, $i = 1,...,k$, Koksova raspodela bi odgovarala hipererlangovoj raspodeli (slika 3d), sa Laplasovom transformacijom

$$\Phi(\theta) = \sum_{i=1}^{k} (1-p_i) \prod_{j=0}^{i-1} p_j \left(\frac{\lambda}{\theta + \lambda} \right)^i = \sum_{i=1}^{k} p_i^o \left(\frac{\lambda}{\theta + \lambda} \right)^i. \tag{28}$$

Koksove raspodele su privlačile pažnju u proteklom periodu zbog mogućnosti analize korišćenjem metoda faza, a preko njih se zadovoljavajuće mogu aproksimirati proizvoljne raspodele. Tako se elementarnim metodama mogu dobiti rezultati koji bi inače zahtevali vrlo kompleksnu matematiku.

8. Analize bazirane na Koksovoj raspodeli

U raznim složenim situacijama, kao što je, recimo, proces izvršenja poslova u računarima, posmatranjem raspodele slučajne promenjive vremena opsluge dolazi se do rezultata da se radi o generalizovanom semi-Markovskom procesu, čija analiza zahteva dobru računarsku podršku. Ako su verovatnoće izvršnog vremena eksponencijalne raspodele, proces predstavlja Markov lanac sa kontinualnim vremenom, koji je lakši za rešavanje. Nadalje, moguće je generisati model Generalizovane stohastičke Petrijeve mreže i, u sledećem koraku, aproksimaciju Koksovom raspodelom.

Laplasova transformacija Koksove raspodele, $\Phi(\theta)$, je racionalna i može aproksimirati veliki broj proizvoljnih raspodela sa željenom tačnošću, što se obezbeđuje dovoljno velikim brojem faza k. Aproksimacioni problem se formuliše datom proizvoljnom raspodelom i postupkom pronalaženja intenziteta opsluge po fazama, $\mu_i = \lambda_i$, $i = 1,...,k$ i verovatnoća prelaska u sledeće stanje p_i, $i = 1,...,k$-1, ($p_k = 1$), tako da je kvalitet aproksimacije maksimiziran. Ovo se obično vrši u kompleksnom prostoru minimiziranjem rastojanja između Furijeove transformacije Koksove raspodele $\Phi(j\omega)$ i proračunate Furijeove transformacije aproksimirane raspodele. Minimizacija je interpolacioni problem koji se može rešavati raznim numeričkim metodama.

Postoji veliki broj radova u kojima se generalne raspodele (G) aproksimiraju raspodelama faznog tipa (PH), koje su zbog Markovskih osobina analitički prilagodljive. PH raspodela je raspodela vremena zauzetosti (apsorbcionog vremena) u Markovskom lancu sa kontinualnim vremenom. Istraživanja se fokusiraju na specifičan problem nalaženja postupka koji prevodi generalnu raspodelu u faznu na način da se one poklapaju u prva tri momenta. Ovo se smatra dovoljno tačnim za modeliranje procesa u savremenim sistemima opsluge, odnosno, u dugom periodu korišćeni pristup sa dva momenta više ne zadovoljava, jer na ponašanje niza aktuelnih modela sa čekanjem uticajan je treći moment. Uz ovaj pristup, potreban je efikasan algoritam određivanja parametara, koji bi zadovoljavao što veći broj raspodela. Takođe, odgovarajuća raspodela faznog tipa treba da ima samo nekoliko faza, da bi prostorna prezentacija stanja rezultirajućeg Markovskog lanca bila pregledna.

9. Erlang-Koksove raspodele

Od interesa je podskup PH raspodela tipa EC (Erlang-Cox) sa šest slobodnih parametara i mogućnošću da se odrede ti parametri u zatvorenoj formi, zavisnoj od parametara polazne generalne raspodele. Skup EC raspodela je dovoljan da dobro reprezentuje bilo koju generalnu raspodelu. Konkretnije, ako se generalna raspodela dobro reprezentuje sa n-faznom acikličnom PH raspodelom, tada postoji EC raspodela sa ne više od n+1 faze koja dobro reprezentuje generalnu raspodelu. Za generalnu raspodelu se kaže da je „dobro reprezentovana“ drugom raspodelom ako im se poklapaju prva tri momenta. Aciklična PH raspodela je bez tranzicija iz većeg u manje stanje i pogodnija je za proračune od ciklične. Koksova PH raspodela je aciklična PH raspodela sa verovatnoćom prelaska u prvo više stanje.

Postoji veliki broj algoritama određivanja podudarnih momenata (moment matching algorithms). Oni se odlikuju nekim od četiri bitne dimenzije: brojem korišćenih momenata koji treba da se slože, opštošću rešenja, proračunskom efikasnošću algoritma, minimalnošću broja faza.

Pristup preko EC raspodele podrazumeva raspodelu koja je konvolucija (n-2) faze Erlangove raspodele (dva slobodna parametra) i dvofazne Koksove raspodele (četiri slobodna parametra). Sama Koksova raspodela je pogodna za aproksimaciju raspodela visoke varijabilnosti, međutim, zahteva veći broj faza za aproksimaciju raspodela sa manjim drugim i trećim momentom. Veliki broj faza zahteva sam po sebi da se mora odrediti mnogo slobodnih parametara, što će kod algoritma koji pokušava da dobro reprezentuje proizvoljnu raspodelu, koristeći minimalni broj faza, verovatno dovesti do proračunske neefikasnosti. S druge strane, n-fazna Erlangova raspodela poseduje samo dva slobodna parametra i najmanji normalizovani drugi i treći moment među n-faznim PH raspodelama, čime je ograničen skup raspodela koje može reprezentovati.

Kombinacijom Erlangove raspodele sa dvofaznom Koksovom raspodelom reprezentuju se raspodele svih rangova varijabilnosti, a činjenica da se radi o malom broju parametara omogućuje da se dobiju zatvorene forme izraza za parametre koji reprezentuju datu raspodelu. Pretpostavimo da treba da se podudaraju prva tri momenta date raspodele sa raspodelom koja se sastoji od Erlangove raspodele iza koje sledi dvofazna Koksova raspodela. Ako je data raspodela sa dovoljno velikim drugim i trećim momentom, tada je dvofazna Koksova raspodela sama dovoljna. Ako je varijabilnost date raspodele manja, dodaje se jednofazna generalizovana Erlangova raspodela ispred dvofazne Koksove raspodele. Ako to nije dovoljno, dodaje se dvofazna Erlangova raspodela. Ako raspodela ima vrlo malu varijabilnost, potrebno je koristiti mnogo faza Erlangove raspodele da bi se postigla dovoljno mala varijabilnost.

Postoji u zatvorenoj formi rešenje za parametre PH raspodele koje dobro reprezentuje datu raspodelu [1,2]. Ovim, relativno složenim rešenjem, postignuto je slaganje prva tri momenta. Ključni momenat je odabir EC raspodele sa šest slobodnih parametara. Izvršena je kompletna karakterizacija EC raspodele u odnosu na normalizovane momente. Razrađene su tri varijante rešenja za parametre EC raspodela (prosto, kompletno, sigurno), radi najboljeg reprezentovanje polaznih raspodela.

10. Modeli u telekomunikacionom saobraćaju

Koksova raspodela se pri kompleksnijim analizama sreće u modelima telekomunikacionog saobraćaja, kao raspodela dolaznog toka ili vremena opsluge. Kad je u pitanju sistem sa gubicima, sa eksponencijalnim vremenom opsluge i dolaznim tokom koji poseduje LST, rešenje za saobraćajne parametre pruža Generalna Erlangova formula gubitaka i prateće relacije. Kada su u pitanju modeli da čekanjem, situacija je kompleksnija. Proteklih godina objavljen je veći broj radova koji se bave ovim problemima, tako da se mogu pronaći postupci analitičkog rešavanja sistema tipa $M/C_k/N$, $E_k/C_2/N$, $\lambda(n)/C_k/r/N$ i slični. Vezano za aktuelnu problematiku analize modela rubnih optičkih čvorova za komutacuju „burst"-eva, gde se dolazni tok tretira preko tri stanja (kratak „burst" – slobodno stanje –dugačak „burst") [11].

Još kod razvoja multislot sistema analizirane su situacije sa raznim dolaznim tokovima obnavljanja (renewal), među kojima zapaženo mesto zauzimaju tokovi Koksa [15]. U sistemima mobilne telefonije vreme provedeno u ćeliji predstavlja manja vrednost od vremena zadržavanja (pri handoveru) i vremena trajanja poziva. Ova situacija navodi na potrebu da se problem takođe razmatra preko PH raspodele. Takođe, raspodela Koksa se koristi u modelima za rešavanje problema reduciranja autentikacionog signalizacionog saobraćaja kod mobilnih mreža treće generacije [12].

U klasičnoj teoriji telekomunikacionog saobraćaja raspodela trajanja poziva je eksponencijalna, zahvaljujući karakteru trajanja razgovora. Kod savremenih telekomunikacionih mreža sa mešovitim tipom saobraćaja (video, podaci, govor), kao što su ATM ćelije, primernije je trajanje zauzeća razmatrati preko Markovskog modulisanog Puasonovog procesa ili PH procesa obnavljanja, čime se aktualizuje Koksova raspodela [10]. Interesantan je pristup analizi performansi ATM adaptacionog sloja (AAL2) [3], posebno za potrebe UTRAN (Universal Terrestrial Radio Acces Network) kod mobilnih komunikacionih sistema treće generacije (UMTS/IMT-2000), koji podržavaju multimedijalne servise. Za analizu AAL2 transmitera, kod koga se razlikuju multipleksirajući i transmisioni red čekanja, postoji više pristupa. Pored direktnog pristupa, moguće je izlazni proces modelirati kao sumu n-determinističkih izvora i primeniti $nD/D/1$ red čekanja. Izlazni proces je rezultat formiranja ćelije na bazi kratkih paketa i može se predstaviti Koksovom raspodelom sa velikim brojem faza, koji je jednak broju CPS (Common Part Sublayer) paketa u ATM ćeliji.

11. Zaključak

Možemo zaključiti da je fenomen Koksovih raspodela prošao put od interesantne forme načina prezentovanja raspodele sa velikim brojem parametara, rešavanja modela opsluge sa čekanjem, sa Koksovim raspodelama relativno manjeg broja faza u dolaznom toku ili vremenu opsluge, fitovanja opštijih raspodela, do nezaobilazne raspodele pri ozbiljnijim analizama modela multimedijalnog saobraćaja. Navedene su neke novije reference koje to pokazuju, dok postoji velik broj referenci, koje su trenutno bile dostupne u formi apstrakta, a koje bi mogle kompletirati sliku o značaju ove raspodele.

Literatura

[1] T. Osogami, M. Harchol-Balter, *Necessary and sufficient conditions for representing general distributions by Coxians*, Technical Report CMU-CS-02-178, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, September 2002.

[2] T. Osogami, M. Harchol-Balter, *A closed-form solution for mapping general distributions to minimal PH distributions*, Technical Report CMU-CS-03-114, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, February 2003.

[3] G. Ko, S. Moon, A. Ahmad and K. Kim, *Performance Analisis of the ATM Adaptation Layer 2 (AAL2)*, Int. J. Elektr. Commun. (AEÜ), vol. 58, 2004, 193-199.

[4] B. H. Soong, J. A. Barria, *A coxian model for channel holding time distributed for teletraffic mobility modeling*, IEEE Communications Letters, vol. 4, no.12, December 2000, 402-404.

[5] H. Michiel, K. Laevens, *Teletraffic Engineering in a Broad-Band Era*, Proceedings of the IEEE, vol. 85, no. 12, December 1997, 2007-2032.

[6] K. Sen, *Lattice path approach to transient analysis of M/G/1/N non-Markovian queues using Cox distributions*, Journal of Statist. Planning and Inference, 101, 2002, 133-147.

[7] M.I. Vidalis, H.T. Papadopoulos, *Markovian analysis of production lines with Coxian-2 service times*, Intl. Trans. in Op. Res. 6, 1999, 495-524.

[8]. H. Luh, *Derivation of the N-step interdeparture time distribution in GI/G/1 queueing systems*, Europ. Journal of Op. Res. 118, 1999, 194-212.

[9] Y. Sasaki, H. Imai, M. Tsunoyama, I. Ishii, *Approximation of probability distribution functions by Coxian distribution to evaluate multimedia systems*, Systems and Computers in Japan, vol.35, no.2, February 2004, 16-24.

[10] S.H.Kang, Y.H.Kim, D.K. Sung and B.D.Choi, *An Application of Markovian Arrival Process (MAP) to Modeling Superposed ATM Cell Streams*, IEEE Trans. On Communs, vol. 50, no.4, April 2002, 633-642.

[11] L. Xu, H.G.Perros and G.N.Rouskas, *A Queueing Network Model of an Edge Optical Burst Switching Node*, Proceedings of IEEE INFOCOM 2003, April 2003.

[12] Y.B. Lin, Y.K. Chen, *Reducing Authentication Signaling Traffic in Third-Generation Mobile Network*, IEEE Transactions on Wireles Communications, vol.2, no.3, May 2003, 493-501.

[13] V.B.Iversen, *Teletraffic Engineering*, Dept. of Telecommunications, Technical University of Denmark, 2002.

[14] S. Haddad, P. Moreaux, G. Chiola, *Efficient Handling of Phase-type Distributions in Generalized Stochastic Petri Nets*, (rad dostupan na Internetu) March 1997.

[15] D. Medhi, A. Van de Liefvoort, C.S.Reece, Perfomance Analysis of a Digital Link with Heterogeneous Multislot Traffic, IEEE Trans. On Communs, vol.43, no. 2/3/4, February/March/April 1995, 968-976.

Abstract: *In this paper property of Coxian distributions, as specific subset of phase type distributions, are analyzed. Although in the complicate form, they contain combination of pondered component with exponential distribution for which is easy possible to find LST, and relative complicated estimation in serving models. Numerous parameters enable good approximation of general type distributions.*

The properties of Erlangian and hiperexponential, as fitting distributions, are exposed. Subset of Erlangian-Coxian (EC) distributions is accented since they are suitable for three moment fitting. Also, traffic situations in modern telecommunications networks are analyzed.

Keywords: *Coxian distribution, phase-type (PH) streams, fitting distributions, Erlang.*

COXIAN DISTRIBUTION STREAMS IN TELETRAFFIC MODELS

Miodrag Bakmaz, Bojan Bakmaz